线性代数
第五章：矩阵的等价、相似与合同

宿州学院　数学与统计学院

目录

1 5.1 矩阵的等价、相似与合同

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义5.1 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等变换(初等行变换和初等列变换) 化为了矩阵$B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，则称矩阵A 和B 等价.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义5.1 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等变换(初等行变换和初等列变换) 化为了矩阵$B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，则称矩阵A 和B 等价.

"等价"是两个同阶矩阵之间的一种特殊关系，其满足：

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义5.1 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等变换(初等行变换和初等列变换) 化为了矩阵$B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，则称矩阵A 和B 等价.

“等价”是两个同阶矩阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反身性.即任何矩阵都与它自身等价；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的初等行变换可以将矩阵化为规范阶梯形矩阵，由此给出了线性方程组有解的充要条件. 其实，也能引入矩阵的初等列变换概念。称下列变换为矩阵的初等列变换：

(1)交换矩阵的两列；(2)将矩阵的某一列乘非0数；(3)将矩阵的某一列乘数c 加到另一列.

矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

定义5.1 若矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等变换(初等行变换和初等列变换) 化为了矩阵$B=(b_{ij})_{m\times n}$ ，则称矩阵A 和B 等价.

“等价”是两个同阶矩阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反身性.即任何矩阵都与它自身等价；

(2)对称性.若矩阵A 与B 等价，则矩阵B 与A 也等价；

(3)传递性. 若矩阵A 与B 等价，矩阵B 与C 等价,则矩阵A 与C 也等价.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：两个同阶矩阵满足什么条件时一定等价？

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：两个同阶矩阵满足什么条件时一定等价？

假设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等行变换化为了规范阶梯形矩阵C .

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：两个同阶矩阵满足什么条件时一定等价？

假设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 经过初等行变换化为了规范阶梯形矩阵C .

假设C 的主元个数为r ，对C 可以经过列的交换，将其主元所在的列交换到前r 列，得到矩阵

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_{1(r+1)} & \cdots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_{2(r+1)} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_{r(r+1)} & \cdots & d_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩阵的等价、相似与合同

将D 的第$l(l=1,2,...,r)$列乘$(-d_{lk})$ 加到第k列，$(k=r+1,r+2,...,n)$，则矩阵D 可以化为

$$D \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩阵的等价、相似与合同

将D 的第$l(l=1,2,...,r)$列乘$(-d_{lk})$ 加到第k列，$(k=r+1,r+2,...,n)$，则矩阵D 可以化为

$$D \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩阵的等价、相似与合同

将D 的第$l(l=1,2,...,r)$列乘$(-d_{lk})$ 加到第k列，$(k=r+1,r+2,...,n)$，则矩阵D 可以化为

$$D \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即，矩阵A 经过初等变换(初等行变换和初等列变换)可以化为$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中$r$ 为矩阵A 的主元个数，也是矩阵A 的秩。

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则A 等价于$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则A 等价于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵A 的等价标准形.

它由A 的秩和阶数唯一确定.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则A 等价于$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为矩阵$A$ 的等价标准形.

它由A 的秩和阶数唯一确定.

由矩阵的等价满足对称性与传递性以及定理5.1得：两个同阶矩阵等价的充要条件是他们有相同的秩.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则A 等价于$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵A 的等价标准形.

它由A 的秩和阶数唯一确定.

由矩阵的等价满足对称性与传递性以及定理5.1得：两个同阶矩阵等价的充要条件是他们有相同的秩.

例5.1

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则A 等价于$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为矩阵A 的等价标准形.

它由A 的秩和阶数唯一确定.

由矩阵的等价满足对称性与传递性以及定理5.1得：两个同阶矩阵等价的充要条件是他们有相同的秩.

例5.1设$A=(a_{ij})_{3\times 4}$，若$r(A)=2$，则矩阵A 的等价标准形是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

将第i 列乘数k 加到第j 列对应的初等矩阵是 $P(j(k),i)$.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

将第i 列乘数k 加到第j 列对应的初等矩阵是 $P(j(k),i)$.

可以直接验证：对矩阵A 实施初等列变换，就相当于在矩阵A的右侧乘上相应的初等矩阵，即

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

将第i 列乘数k 加到第j 列对应的初等矩阵是 $P(j(k),i)$.

可以直接验证：对矩阵A 实施初等列变换，就相当于在矩阵A的右侧乘上相应的初等矩阵，即

(1) 交换矩阵A 的第i 列和第j 列，得到矩阵B ，则$AP(i,j)=B$ ；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

将第i 列乘数k 加到第j 列对应的初等矩阵是 $P(j(k),i)$.

可以直接验证：对矩阵A 实施初等列变换，就相当于在矩阵A的右侧乘上相应的初等矩阵，即

(1) 交换矩阵A 的第i 列和第j 列，得到矩阵B ，则$AP(i,j)=B$ ；

(2)将矩阵A 的第i 列乘非c 数,得到矩阵B ，则$AP(i(c))=B$ ；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

单位矩阵经过一次初等列变换，所得矩阵也是初等矩阵.

交换第i 列和第j 列对应的初等矩阵是$P(i,j)$ ；

将第i 列乘非0 数c 对应的初等矩阵是$P(i(c))$ ；

将第i 列乘数k 加到第j 列对应的初等矩阵是 $P(j(k),i)$.

可以直接验证：对矩阵A 实施初等列变换，就相当于在矩阵A的右侧乘上相应的初等矩阵，即

(1) 交换矩阵A 的第i 列和第j 列，得到矩阵B ，则$AP(i,j)=B$ ；

(2)将矩阵A 的第i 列乘非c 数,得到矩阵B ，则$AP(i(c))=B$ ；

(3)将矩阵A 的第i 列乘数k 加到第j 列，得到矩阵B ，则$AP(j(k),i)=B$.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1可以叙述为

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1可以叙述为

定理5.2

5.1 矩阵的等价、相似与合同

定理5.1可以叙述为

定理5.2 设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，且$r(A)=r$，则存在m 阶初等矩阵$P_1,P_2,...,P_s$，n 阶初等矩阵$Q_1,Q_2,...,Q_t$，使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$P_1,P_2,...,P_s$是相应的初等行变换对应的初等矩阵；
$Q_1,Q_2,...,Q_t$是相应的初等列变换对应的初等矩阵。

5.1 矩阵的等价、相似与合同

在信息处理，信号传输，电路分析等问题中，经常会用到多个变量之间的线性变换，而线性变换在给定“基础变量”下的数学表达大都是矩阵形式.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

在信息处理，信号传输，电路分析等问题中，经常会用到多个变量之间的线性变换，而线性变换在给定“基础变量”下的数学表达大都是矩阵形式.

设线性变换在给定“基础变量”下的矩阵是A，在另一组基础变量下的矩阵是B，则矩阵A 与B在数学中的关系是，存在可逆矩阵P ，使$P^{-1}AP = B$.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

在信息处理，信号传输，电路分析等问题中，经常会用到多个变量之间的线性变换，而线性变换在给定“基础变量”下的数学表达大都是矩阵形式.

设线性变换在给定“基础变量”下的矩阵是A，在另一组基础变量下的矩阵是B，则矩阵A 与B在数学中的关系是，存在可逆矩阵P ，使$P^{-1}AP = B$.矩阵之间的这种关系称为相似.即

定义5.2

5.1 矩阵的等价、相似与合同

在信息处理，信号传输，电路分析等问题中，经常会用到多个变量之间的线性变换，而线性变换在给定“基础变量”下的数学表达大都是矩阵形式.

设线性变换在给定“基础变量”下的矩阵是A，在另一组基础变量下的矩阵是B，则矩阵A 与B在数学中的关系是，存在可逆矩阵P ，使$P^{-1}AP = B$.矩阵之间的这种关系称为相似.即

定义5.2 设A, B是两个n 阶方阵，若存在可逆矩阵P ，使$P^{-1}AP = B$ ，则称矩阵A ，B 相似，矩阵P 称为A ，B 相似的相似变换矩阵.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

(2)对称性. 即方阵A 与B 相似，则B 与A 也相似.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

(2)对称性. 即方阵A 与B 相似，则B 与A 也相似.

(3)传递性.即方阵A 与B相似，B 与C 相似，则A 与C 相似.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

(2)对称性. 即方阵A 与B 相似，则B 与A 也相似.

(3)传递性.即方阵A 与B相似，B 与C 相似，则A 与C 相似.

实际问题中，经常需要寻找恰当的“基础变量”，使得线性变换在此“基础变量”下的矩阵为对角形矩阵.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

(2)对称性. 即方阵A 与B 相似，则B 与A 也相似.

(3)传递性.即方阵A 与B相似，B 与C 相似，则A 与C 相似.

实际问题中，经常需要寻找恰当的“基础变量”，使得线性变换在此“基础变量”下的矩阵为对角形矩阵.

定义5.3

5.1 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的相似是两个同阶方阵之间的一种特殊关系，其满足：

(1)反射性.即任何方阵都和它自身相似；

(2)对称性. 即方阵A 与B 相似，则B 与A 也相似.

(3)传递性.即方阵A 与B相似，B 与C 相似，则A 与C 相似.

实际问题中，经常需要寻找恰当的“基础变量”，使得线性变换在此“基础变量”下的矩阵为对角形矩阵.

定义5.3设方阵矩阵A，若存在对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix},$$

使得A与D 相似，则称A 可以对角化.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A 可以对角化时，如何求相似变换矩阵P ，使得$P^{-1}AP$ 是对角阵？

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A 可以对角化时，如何求相似变换矩阵P ，使得$P^{-1}AP$ 是对角阵？

设矩阵A 与B 相似，且其相似变换矩阵P ，若满足$P^{-1}=P^t$ ，即P 的逆矩阵是P 的转置矩阵，也就是$P^{-1}AP=P^tAP=B$ ，这种关系又称为合同。

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A可以对角化时，如何求相似变换矩阵P，使得$P^{-1}AP$是对角阵？

设矩阵A与B相似，且其相似变换矩阵P，若满足$P^{-1}=P^t$，即P的逆矩阵是P的转置矩阵，也就是$P^{-1}AP=P^tAP=B$，这种关系又称为合同。

定义5.4

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A 可以对角化时，如何求相似变换矩阵P ，使得$P^{-1}AP$ 是对角阵？

设矩阵A 与B 相似，且其相似变换矩阵P ，若满足$P^{-1}=P^t$ ，即P 的逆矩阵是P 的转置矩阵，也就是$P^{-1}AP=P^tAP=B$ ，这种关系又称为合同。

定义5.4设A ，B 是两个n 阶方阵，若存在可逆矩阵P ，使得$P^tAP=B$ ，则称矩阵A ，B 合同，矩阵P 称为A ，B 合同的合同变换矩阵.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A可以对角化时，如何求相似变换矩阵P，使得$P^{-1}AP$是对角阵？

设矩阵A与B相似，且其相似变换矩阵P，若满足$P^{-1}=P^t$，即P的逆矩阵是P的转置矩阵，也就是$P^{-1}AP=P^tAP=B$，这种关系又称为合同。

定义5.4设A，B是两个n阶方阵，若存在可逆矩阵P，使得$P^tAP=B$，则称矩阵A，B合同，矩阵P称为A，B合同的合同变换矩阵.

实可逆矩阵P，若满足$P^{-1}=P^t$，则称P为正交矩阵.

5.1 矩阵的等价、相似与合同

问题是：什么样的矩阵可以对角化？在矩阵A 可以对角化时，如何求相似变换矩阵P ，使得$P^{-1}AP$ 是对角阵？

设矩阵A 与B 相似，且其相似变换矩阵P ，若满足$P^{-1}=P^t$ ，即P 的逆矩阵是P 的转置矩阵，也就是$P^{-1}AP=P^tAP=B$ ，这种关系又称为合同。

定义5.4设A ，B 是两个n 阶方阵，若存在可逆矩阵P ，使得$P^tAP=B$ ，则称矩阵A ，B 合同，矩阵P 称为A ，B 合同的合同变换矩阵.

实可逆矩阵P ，若满足$P^{-1}=P^t$ ，则称P 为正交矩阵.

矩阵的合同也满足反身性、对称性和传递性.

同样的问题：矩阵满足什么条件，才可以合同于对角矩阵？

宿州学院 SUZHOU UNIVERSITY

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com