线性代数
自测题第三章难点解答

宁 群

(宿州学院 数学与统计学院)

目录

自测题第三章难点解答

1.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\t\end{pmatrix}$, $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$是3维数组，(1)若存在不全为0的系数$x_1,x_2,x_3$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$，则$t=$；(2)若存在唯一的系数$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_2$，则$t$满足；

自测题第三章难点解答

1.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\t\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$是3维数组，(1)若存在不全为0的系数$x_1,x_2,x_3$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$，则$t=$；(2)若存在唯一的系数$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_2$，则$t$满足；

解 (1)-1或者2；(2)$t\neq-1$且$t\neq 2$.

自测题第三章难点解答

1.原题：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$, $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$是3维数组，(1)若存在不全为0的系数$x_1, x_2, x_3$， 使得$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$，则$t =$；(2)若存在唯一的系数$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_2$，则$t$满足；

解 (1)-1或者2；(2)$t \neq -1$且$t \neq 2$.

理由：

自测题第三章难点解答

1.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\t\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$是3维数组，(1)若存在不全为0的系数$x_1,x_2,x_3$，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$，则$t=$；(2)若存在唯一的系数$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_2$，则$t$满足；

解 (1)-1或者2；(2)$t\neq-1$且$t\neq2$.

理由：(1)$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$对应的齐次线性方程组，其系数矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&t&-2\\2&1&t\end{pmatrix}$，对其进行初等行变换，

自测题第三章难点解答

化为阶梯形， $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

化为阶梯形， $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & t-1 & -2 \end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

化为阶梯形， $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & t-1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & t^2-t-2 \end{pmatrix},$$

自测题第三章难点解答

化为阶梯形， $A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & t-1 & -2 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & t^2-t-2 \end{pmatrix}$，

若存在不全为0的系数使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$成立，必有$A$的主元个数$< 3$，即 $t^2 - t - 2 = 0$，$t = -1$或者$t = 2$；

自测题第三章难点解答

化为阶梯形，$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & t-1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & t^2-t-2 \end{pmatrix},$$

若存在不全为0的系数使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_1$成立，必有$A$的主元个数$< 3$，即 $t^2 - t - 2 = 0$，$t = -1$或者$t = 2$；

(2)$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_2$对应的线性方程组的增广矩阵

$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & t & -2 & 2 \\ 2 & 1 & t & 3 \end{pmatrix}$，对其进行初等行变换，化为阶梯形，

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & 0 & t^2-t-2 & t \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & 0 & t^2-t-2 & t \end{pmatrix}$$

若存在唯一的系数x_1，x_2，x_3，使得

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_2$，

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & 0 & t^2-t-2 & t \end{pmatrix}$$

若存在唯一的系数x_1，x_2，x_3，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_2$，即$\overline{A}$的阶梯形矩阵中最后一列无主元，且有三个主元，从而 $t^2 - t - 2 \neq 0$，

自测题第三章难点解答

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & t-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & 1 \\ 0 & 0 & t^2-t-2 & t \end{pmatrix}$$

若存在唯一的系数x_1，x_2，x_3，使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta_2$，即$\overline{A}$的阶梯形矩阵中最后一列无主元，且有三个主元，从而 $t^2 - t - 2 \neq 0$， $t \neq -1$且$t \neq 2$.

自测题第三章难点解答

2.原题：设α, β, $\gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$$，则$\alpha+\beta+\gamma=$

自测题第三章难点解答

2.原题：设$\alpha,\ \beta,\ \gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$$，则$\alpha+\beta+\gamma=$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

2.原题：设α, β, $\gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}，则\alpha+\beta+\gamma=$$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

理由：

自测题第三章难点解答

2.原题：设$\alpha, \beta, \gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}，则\alpha+\beta+\gamma=$$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

理由：因为$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

自测题第三章难点解答

2.原题：设$\alpha, \beta, \gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}，则\alpha+\beta+\gamma=$$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

理由：因为$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

2.原题：设α, β, $\gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}，则\alpha+\beta+\gamma=$$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

理由：因为$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-12\end{pmatrix},$$

自测题第三章难点解答

2.原题：设α, β, $\gamma \in F^3$，且

$$\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$$，则$\alpha+\beta+\gamma=$

解 $\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

理由：因为$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-12\end{pmatrix}$$，$\alpha+\beta+\gamma=\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，
且$2(\alpha_1 - \beta) + 3(\alpha_2 + \beta) = 4\alpha_3 + 2\beta$，则$\beta =$

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

且$2(\alpha_1 - \beta) + 3(\alpha_2 + \beta) = 4\alpha_3 + 2\beta$，则$\beta =$

解 $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，
且$2(\alpha_1-\beta)+3(\alpha_2+\beta)=4\alpha_3+2\beta$，则$\beta=$

解 $\begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$

理由：

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，
且$2(\alpha_1-\beta)+3(\alpha_2+\beta)=4\alpha_3+2\beta$，则$\beta=$

解 $\begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$

理由：因为$2\alpha_1-2\beta+3\alpha_2+3\beta=4\alpha_3+2\beta$，

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

且$2(\alpha_1 - \beta) + 3(\alpha_2 + \beta) = 4\alpha_3 + 2\beta$，则$\beta =$

解 $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$

理由：因为$2\alpha_1 - 2\beta + 3\alpha_2 + 3\beta = 4\alpha_3 + 2\beta$，所以

$$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3$$

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，且$2(\alpha_1-\beta)+3(\alpha_2+\beta)=4\alpha_3+2\beta$，则$\beta=$

解 $\begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$

理由：因为$2\alpha_1-2\beta+3\alpha_2+3\beta=4\alpha_3+2\beta$，所以

$$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-4\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

3.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

且$2(\alpha_1-\beta)+3(\alpha_2+\beta)=4\alpha_3+2\beta$，则$\beta=$

解 $\begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$

理由：因为$2\alpha_1-2\beta+3\alpha_2+3\beta=4\alpha_3+2\beta$，所以

$$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-4\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\13\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

解 (1)$a=-1$；(2)$a\neq-1$.

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

解 (1)$a=-1$；(2)$a\neq -1$.

理由：

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

解 (1)$a=-1$； (2)$a\neq -1$.

理由： 方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

解 (1)$a=-1$；(2)$a\neq -1$.

理由：方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

4.原题：

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$，

(1)若向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

(2)若向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，则a满足；

解 (1)$a=-1$；(2)$a\neq -1$.

理由： 方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$的增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&3&a+2&3\\1&a&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&a-2&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&-1&a&1\\0&0&a^2-2a-3&a-3\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且$a-3\neq 0$，$a=-1$；

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3\neq 0$，$a=-1$；

(2)向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3\neq 0$，$a=-1$；

(2)向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组有解，则$\overline{A}$的最后一列无主元，

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3\neq 0$，$a=-1$；

(2)向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组有解，则$\overline{A}$的最后一列无主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3=0$，或者$a^2-2a-3\neq 0$，

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3\neq 0$，$a=-1$；

(2)向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组有解，则$\overline{A}$的最后一列无主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3=0$，或者$a^2-2a-3\neq 0$，$a\neq -1$.

自测题第三章难点解答

(1)向量β不能由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组无解，则$\overline{A}$的最后一列有主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3\neq 0$，$a=-1$；

(2)向量β可以由向量组α_1，α_2，α_3线性表出，线性方程组有解，则$\overline{A}$的最后一列无主元，所以$a^2-2a-3=0$且 $a-3=0$，或者$a^2-2a-3\neq 0$，$a\neq -1$.

5.原题： 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\b\\b\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}b\\1\\b\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}b\\b\\1\end{pmatrix}\in F^3$，

(1)若存在不全为0的系数x_1,x_2,x_3，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，则$b$满足；

(2)若只有当系数x_1,x_2,x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，则$b$满足；

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由：

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由：因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & b \\ b & 1 & b \\ b & b & 1 \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由： 因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & b\\ b & 1 & b\\ b & b & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b^2 & b-b^2\\ 0 & b-b^2 & 1-b^2\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由： 因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & b\\ b & 1 & b\\ b & b & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b^2 & b-b^2\\ 0 & b-b^2 & 1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b & b-1\\ 0 & b-b^2 & 1-b^2\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由： 因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&b\\b&1&b\\b&b&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b^2&b-b^2\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&0&1+b-2b^2\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq-\frac{1}{2}$.

理由： 因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&b\\b&1&b\\b&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b^2&b-b^2\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&0&1+b-2b^2\end{pmatrix}$$

(1)存在不全为0的系数x_1,x_2,x_3，使得

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由：因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&b\\b&1&b\\b&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b^2&b-b^2\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&0&1+b-2b^2\end{pmatrix}$$

(1)存在不全为0的系数x_1,x_2,x_3，使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$有非零解，$A$的阶梯形中主元个数$<3$,

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由： 因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & b\\ b & 1 & b\\ b & b & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b^2 & b-b^2\\ 0 & b-b^2 & 1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b & b-1\\ 0 & b-b^2 & 1-b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & b & b\\ 0 & 1-b & b-1\\ 0 & 0 & 1+b-2b^2\end{pmatrix}$$

(1)存在不全为0的系数x_1,x_2,x_3，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$有非零解，$A$的阶梯形中主元个数$<3$，$1+b-2b^2=0$或者$b-1=0$，

自测题第三章难点解答

解 (1)$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；(2)$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

理由：因为$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&b&b\\b&1&b\\b&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b^2&b-b^2\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&b-b^2&1-b^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&b&b\\0&1-b&b-1\\0&0&1+b-2b^2\end{pmatrix}$$

(1)存在不全为0的系数x_1,x_2,x_3，使得$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$有非零解，$A$的阶梯形中主元个数$<3$，$1+b-2b^2=0$或者$b-1=0$，$b=1$或者$b=-\frac{1}{2}$；

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，即，$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$= 3$，

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$=3$，$1+b-2b^2\neq 0$且$b-1\neq 0$，

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$=3$，$1+b-2b^2\neq 0$且 $b-1\neq 0$，$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使
$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，即，$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$= 3$，$1 + b - 2b^2 \neq 0$且 $b - 1 \neq 0$，$b \neq 1$且$b \neq -\frac{1}{2}$.

6.原题：设α_1，α_2，α_3，$\beta \in F^3$，以α_1，α_2，α_3，β为列构成一个3×4矩阵A，对A实施初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则下列式子不成立的是

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，即，$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$= 3$，$1 + b - 2b^2 \neq 0$且 $b - 1 \neq 0$，$b \neq 1$且$b \neq -\frac{1}{2}$.

6.原题：设α_1，α_2，α_3，$\beta \in F^3$，以α_1，α_2，α_3，β为列构成一个3×4矩阵A，对A实施初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则下列式子不成立的是

解 $\alpha_1 + \alpha_3 = -2\beta$

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$成立，即，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$=3$，$1+b-2b^2\neq 0$且 $b-1\neq 0$，$b\neq 1$且$b\neq -\frac{1}{2}$.

6.原题：设α_1，α_2，α_3，$\beta\in F^3$，以α_1，α_2，α_3，β为列构成一个3×4矩阵A，对A实施初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则下列式子不成立的是

解 $\alpha_1+\alpha_3=-2\beta$

理由：

自测题第三章难点解答

(2)只有当系数x_1, x_2, x_3全为0时，才可以使$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$成立，即，$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0$只有零解，$A$的阶梯形中主元个数$= 3$，$1 + b - 2b^2 \neq 0$且 $b - 1 \neq 0$，$b \neq 1$且$b \neq -\frac{1}{2}$.

6.原题：设α_1，α_2，α_3，$\beta \in F^3$，以α_1，α_2，α_3，β为列构成一个3×4矩阵A，对A实施初等行变换化为阶梯形矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则下列式子不成立的是

解 $\alpha_1 + \alpha_3 = -2\beta$

理由：方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$同解于

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases},$$

自测题第三章难点解答

所以 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ 是它的解，但 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 不是它的解.

自测题第三章难点解答

所以$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$是它的解，但$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$不是它的解.

7.原题：设α_1，α_2，α_3，α_4，$\beta \in F^3$，若β不可以由α_1，α_2，α_3线性表出，则β也不可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

自测题第三章难点解答

所以$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$是它的解，但$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$不是它的解.

7.原题：设α_1，α_2，α_3，α_4，$\beta \in F^3$，若β不可以由α_1，α_2，α_3线性表出，则β也不可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

解 此陈述时错误的.

自测题第三章难点解答

所以$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$是它的解，但$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$不是它的解.

7.原题：设α_1，α_2，α_3，α_4，$\beta \in F^3$，若β不可以由α_1，α_2，α_3线性表出，则β也不可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

解 此陈述时错误的.

理由：

自测题第三章难点解答

所以$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$是它的解，但$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$不是它的解.

7.原题：设α_1，α_2，α_3，α_4，$\beta \in F^3$，若β不可以由α_1，α_2，α_3线性表出，则β也不可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

解 此陈述时错误的.

理由：例如

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

自测题第三章难点解答

所以 $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$是它的解，但 $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$不是它的解.

7.原题：设α_1，α_2，α_3，α_4，$\beta\in F^3$，若β不可以由α_1，α_2，α_3线性表出，则β也不可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

解 此陈述时错误的.

理由：例如

$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, β不可以由α_1，α_2，α_3 线性表出，但β可以由α_1，α_2，α_3，α_4线性表出.

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1 + \beta$，$\alpha_2 + \beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

自测题第三章难点解答

8.原题： 设$\alpha_1, \alpha_2, \beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta$线性无关是$\alpha_1, \alpha_2, \beta$线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：因为组合

$$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta,$$

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：因为组合

$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta$，所以，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta$线性无关，则由 $x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=0$，

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：因为组合

$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta$，所以，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta$线性无关，则由 $x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta=0$，可以得$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：因为组合

$x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta$，所以，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta$线性无关，则由 $x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta=0$，可以得$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，所以 $\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关；

自测题第三章难点解答

8.原题： 设α_1，α_2，$\beta \in F^3$，则$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的

解 必要但非充分条件.

理由：因为组合 $x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta$，所以，若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\beta$线性无关，则由 $x_1(\alpha_1+\beta)+x_2(\alpha_2+\beta)=0$，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+(x_1+x_2)\beta=0$，可以得$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$，所以 $\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关；

反之，$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$线性相关，

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1, α_2, α_3, $\beta\in F^4$，α_1, α_2, α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$, $x\alpha_2+\beta$, $x\alpha_3+\beta$线性相关，则

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1, α_2, α_3, $\beta\in F^4$，α_1, α_2, α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$, $x\alpha_2+\beta$, $x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1，α_2，α_3，$\beta\in F^4$，α_1，α_2，α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$，$x\alpha_2+\beta$，$x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

理由：

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1, α_2, α_3, $\beta\in F^4$，α_1, α_2, α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$, $x\alpha_2+\beta$, $x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

理由：考虑组合

$y_1(x\alpha_1+\beta)+y_2(x\alpha_2+\beta)+y_3(x\alpha_3+\beta)=0$,

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1, α_2, α_3, $\beta\in F^4$，α_1, α_2, α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$, $x\alpha_2+\beta$, $x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

理由：考虑组合

$y_1(x\alpha_1+\beta)+y_2(x\alpha_2+\beta)+y_3(x\alpha_3+\beta)=0$，即，$[(1+x)y_1+y_2+y_3]\alpha_1+[y_1+(1+x)y_2+y_3]\alpha_2+[y_1+y_2+(1+x)y_3]\alpha_3=0$

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$, $\alpha_2+\beta$线性无关是α_1, α_2, β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1, α_2, α_3, $\beta\in F^4$，α_1, α_2, α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$, $x\alpha_2+\beta$, $x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

理由：考虑组合

$y_1(x\alpha_1+\beta)+y_2(x\alpha_2+\beta)+y_3(x\alpha_3+\beta)=0$，即，$[(1+x)y_1+y_2+y_3]\alpha_1+[y_1+(1+x)y_2+y_3]\alpha_2+[y_1+y_2+(1+x)y_3]\alpha_3=0$

而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

自测题第三章难点解答

但$\alpha_1+\beta=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2+\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$线性无关.

所以$\alpha_1+\beta$，$\alpha_2+\beta$线性无关是α_1，α_2，β线性无关的必要但非充分条件.

9.原题： α_1，α_2，α_3，$\beta\in F^4$，α_1，α_2，α_3线性无关且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，若$x\alpha_1+\beta$，$x\alpha_2+\beta$，$x\alpha_3+\beta$线性相关，则

解 $x=0$或者$x=-3$.

理由：考虑组合

$y_1(x\alpha_1+\beta)+y_2(x\alpha_2+\beta)+y_3(x\alpha_3+\beta)=0$，即，$[(1+x)y_1+y_2+y_3]\alpha_1+[y_1+(1+x)y_2+y_3]\alpha_2+[y_1+y_2+(1+x)y_3]\alpha_3=0$

而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + (1+x)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + (1+x)y_3 = 0 \end{cases}$$

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + (1+x)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + (1+x)y_3 = 0 \end{cases}$$

这是关于y_1, y_2, y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1, y_2, y_3，只要齐次线性方程组有非零解；

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + (1+x)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + (1+x)y_3 = 0 \end{cases}$$

这是关于y_1, y_2, y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1, y_2, y_3，只要齐次线性方程组有非零解；而它的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + (1+x)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + (1+x)y_3 = 0 \end{cases}$$

这是关于y_1, y_2, y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1, y_2, y_3，只要齐次线性方程组有非零解；而它的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1+x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1+y_2+y_3=0 \\ y_1+(1+x)y_2+y_3=0 \\ y_1+y_2+(1+x)y_3=0 \end{cases}$$

这是关于y_1,y_2,y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1,y_2,y_3，只要齐次线性方程组有非零解；而它的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1+x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & -x \\ 0 & -x & 1-(1+x)^2 \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + (1+x)y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + (1+x)y_3 = 0 \end{cases}$$

这是关于y_1, y_2, y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1, y_2, y_3，只要齐次线性方程组有非零解；而它的系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1+x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & -x \\ 0 & -x & 1-(1+x)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 0 & -x(3+x) \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

$$\begin{cases} (1+x)y_1+y_2+y_3=0 \\ y_1+(1+x)y_2+y_3=0 \\ y_1+y_2+(1+x)y_3=0 \end{cases}$$

这是关于y_1, y_2, y_3的齐次线性方程组，要找到不全为0的y_1, y_2, y_3，只要齐次线性方程组有非零解；而它的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1+x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & -x \\ 0 & -x & 1-(1+x)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & x & -x \\ 0 & 0 & -x(3+x) \end{pmatrix}$

$x=0$或$x=-3$时，方程组有非零解，原向量组线性相关.

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：(1)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：(1)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：(1)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，而在$F^3$中，线性无关的向量组最多含3个向量，

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：(1)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，而在$F^3$中，线性无关的向量组最多含3个向量，即，3维数组空间中，任意4个向量都相关，

自测题第三章难点解答

10.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且 α_1,α_2线性无关，若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且 α_1,α_2线性无关，

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

若向量组α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，且α_3,α_4线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

解 (1)3；(2)不能确定；3.

理由：(1)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，而在$F^3$中，线性无关的向量组最多含3个向量，即，3维数组空间中，任意4个向量都相关，所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大线性无关组，所以它的秩为3；

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1, α_2线性无关，且α_3, α_4不能由α_1, α_2线性表出，

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩是3.

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩是3.

11.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\in F^5$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$有相同的秩是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$等价的

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩是3.

11.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\in F^5$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$有相同的秩是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$等价的

解 充分必要条件.

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩是3.

11.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\in F^5$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$有相同的秩是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$等价的

解 充分必要条件.

理由：

自测题第三章难点解答

(2)因为α_1,α_2线性无关，且α_3,α_4不能由α_1,α_2线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，但在$F^4$中，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关性，即，不能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性相关还是线性无关，所以不能确定它的秩；

但在α_3,α_4线性相关时，却能确定$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性相关的，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩是3.

11.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2\in F^5$，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$有相同的秩是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$等价的

解 充分必要条件.

理由：因为等价向量组有相同的秩，必要性显然；

自测题第三章难点解答

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关的部分组都是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$的线性无关的部分组，

自测题第三章难点解答

由于$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关的部分组都是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$的线性无关的部分组，而它们有相同的秩，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$的极大线性无关组也是$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$的极大线性无关组，

自测题第三章难点解答

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的部分组都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的线性无关的部分组，而它们有相同的秩，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组也是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的极大线性无关组，所以它们等价.

自测题第三章难点解答

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的部分组都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的线性无关的部分组，而它们有相同的秩，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组也是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的极大线性无关组，所以它们等价.

12.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且任意的$\beta\in F^4$，$\beta$都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且任意的$\beta\in F^3$，$\beta$都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=；

自测题第三章难点解答

由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的部分组都是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的线性无关的部分组，而它们有相同的秩，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组也是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$的极大线性无关组，所以它们等价.

12.原题：(1)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^4$且任意的$\beta\in F^4$，$\beta$都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=;

(2)设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in F^3$且任意的$\beta\in F^3$，$\beta$都可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩=;

解 (1)4；(2)3.

自测题第三章难点解答

理由：

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，而任何4维向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$线性表出，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，而任何4维向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$线性表出，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$与$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$等价，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，而任何4维向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$线性表出，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$与$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$是线性无关的，它的秩为4，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，而任何4维向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$线性表出，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$与$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$是线性无关的，它的秩为4，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的秩$= 4$；

(2)因为任意的$\beta \in F^3$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，

自测题第三章难点解答

理由：(1)因为任意的$\beta \in F^4$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，而任何4维向量都可以由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$线性表出，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$与$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$是线性无关的，它的秩为4，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$的秩$= 4$；

(2)因为任意的$\beta \in F^3$，β都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，分别取$\beta$为

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性表出，

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，

自测题第三章难点解答

$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

13.原题：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为

自测题第三章难点解答

$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

13.原题：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为

解 4.

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

13.原题：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为

解 4.

理由：

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$，则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

13.原题：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为

解 4.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

自测题第三章难点解答

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$ 则$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出，而任何3维向量都可以由$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$线性表出，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$与$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$等价，等价向量组有相同的秩，而$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$是线性无关的，它的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩$=3$.

13.原题：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为

解 4.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩为3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出，

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_5-\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_5-\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$k_1,k_2,k_3$，使得$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_5-\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$k_1,k_2,k_3$，使得$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，而已知$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$l_1,l_2,l_3$，使得$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_5-\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$k_1,k_2,k_3$，使得$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，而已知$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$l_1,l_2,l_3$，使得
$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，从而
$\alpha_5=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+(k_3+l_3)\alpha_3$，这与$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾.

自测题第三章难点解答

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$的秩为4，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性相关，由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，得$\alpha_5-\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$k_1,k_2,k_3$，使得$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，而已知$\alpha_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，即，存在系数$l_1,l_2,l_3$，使得$\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，从而$\alpha_5=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+(k_3+l_3)\alpha_3$，这与$\alpha_5$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出矛盾.

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关，秩为4.

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4 \in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

理由：

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组；

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组；而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，所以对任意的$\beta_k,k=1,2,3,4$，都有$\beta_k$可以由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组；而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，所以对任意的$\beta_k,k=1,2,3,4$，都有$\beta_k$可以由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_k$线性相关，所以$\alpha_1,\alpha_2$ 是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，
$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为2；

自测题第三章难点解答

14.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关，β_1,β_2线性相关，β_3,β_4线性无关，则下列结论错误的是

解 α_1,α_2可以由β_1,β_2线性表出.

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，且$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，所以$\alpha_1,\alpha_2$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的极大线性无关组；而$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，所以对任意的$\beta_k,k=1,2,3,4$，都有$\beta_k$可以由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_k$线性相关，所以$\alpha_1,\alpha_2$ 是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的秩为2；

又β_3,β_4是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的线性无关组，所以$\beta_3,\beta_4$也是它的极大线性无关组，

自测题第三章难点解答

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_3, \beta_4$线性表出；

自测题第三章难点解答

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_3, \beta_4$线性表出；

再，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的秩也是2，所以$\beta_3, \beta_4$也是$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的极大线性无关组，

自测题第三章难点解答

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_3, \beta_4$线性表出；

再，$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的秩也是2，所以$\beta_3, \beta_4$也是$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$的极大线性无关组，

所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$线性表出；

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$可以由$\beta_3, \beta_4$线性表出；

α_3可以由β_3, β_4线性表出；

自测题第三章难点解答

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_3,\beta_4$线性表出；

再，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩也是2，所以$\beta_3,\beta_4$也是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出；

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_3,\beta_4$线性表出；

α_3可以由β_3,β_4线性表出；

但α_1,α_2不能由β_1,β_2线性表出.这是因为α_1,α_2线性无关而β_1,β_2线性相关.

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4 \in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：因为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为3，所以存在$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$1\leq k<l<m\leq 4$，

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4 \in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：因为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为3，所以存在$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$1 \leq k < l < m \leq 4$，

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，所以对任意的$\alpha_i, i = 1,2,3$，都有$\alpha_i$可以由$\beta_k,\beta_l,\beta_m$线性表出，$\beta_k,\beta_l,\beta_m,\alpha_i$线性相关，

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：因为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为3，所以存在$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$1\leq k<l<m\leq 4$，

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，所以对任意的$\alpha_i,i=1,2,3$，都有$\alpha_i$可以由$\beta_k,\beta_l,\beta_m$线性表出，$\beta_k,\beta_l,\beta_m,\alpha_i$线性相关，所以$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，它的秩$=3$.

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：因为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为3，所以存在$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$1\leq k<l<m\leq 4$，

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，所以对任意的$\alpha_i,i=1,2,3$，都有$\alpha_i$可以由$\beta_k,\beta_l,\beta_m$线性表出，$\beta_k,\beta_l,\beta_m,\alpha_i$线性相关，所以$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，它的秩$=3$.

16.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$的秩为

自测题第三章难点解答

15.原题：设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4 \in F^5$且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为2，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩均为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为

解 3.

理由：因为$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的秩为3，所以存在$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，$1 \leq k < l < m \leq 4$，

又因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$可以由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$线性表出，所以对任意的$\alpha_i, i = 1,2,3$，都有$\alpha_i$可以由$\beta_k,\beta_l,\beta_m$线性表出，$\beta_k,\beta_l,\beta_m,\alpha_i$线性相关，所以$\beta_k,\beta_l,\beta_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$的极大线性无关组，它的秩$= 3$.

16.原题：设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$的秩为

解 2.

自测题第三章难点解答

理由：

自测题第三章难点解答

理由： 因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$线性无关，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$，$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$线性相关，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_1) = 0$，$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$线性相关，所以它的秩$= 2$.

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

理由：

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

理由：对任意的非零向量α，都有$\alpha\alpha^T$的每一个列向量都是α的倍数，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

理由：对任意的非零向量α，都有$\alpha\alpha^T$的每一个列向量都是α的倍数，所以矩阵$\alpha\alpha^T$的任意两列一定线性相关，且它有非零列向量，即，有一列线性无关，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，
$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵
$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

理由：对任意的非零向量α，都有$\alpha\alpha^T$的每一个列向量都是α的倍数，所以矩阵$\alpha\alpha^T$的任意两列一定线性相关，且它有非零列向量，即，有一列线性无关，所以它的秩为1.

自测题第三章难点解答

理由：因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$线性无关，且$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关，所以它的秩$=2$.

17.原题：设$\alpha,\beta\in F^3$是两个非零向量，α^T为向量α的转置，β^T为向量β的转置，若$\alpha=2\beta$且$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$是矩阵$A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$的三个列向量，则向量组$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$的秩为

解 1.

理由：对任意的非零向量α，都有$\alpha\alpha^T$的每一个列向量都是α的倍数，所以矩阵$\alpha\alpha^T$的任意两列一定线性相关，且它有非零列向量，即，有一列线性无关，所以它的秩为1.

再，$\alpha=2\beta$，所以$A=(2\beta)(2\beta)^T+\beta\beta^T=5\beta\beta^T$，它的列向量组的秩为1.

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

理由：

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

理由：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ a & 1+a & -1\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

理由：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\a&1+a&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1+2a&-1-2a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

理由：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\a&1+a&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1+2a&-1-2a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a\neq-\frac{1}{2}$时，秩最大为2，$a=-\frac{1}{2}$时，秩最小为1，

自测题第三章难点解答

18.原题：设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1+a\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$，其中$a$是任意数，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩的最大值与秩的最小值之和是

解 3.

理由：以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为列构作矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\a&1+a&-1\\-1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1+2a&-1-2a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$a\neq-\frac{1}{2}$时，秩最大为2，$a=-\frac{1}{2}$时，秩最小为1，和为3.

自测题第三章难点解答

19.原题：设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&0\\a&1&1\end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\a&1&1&b\end{pmatrix}$$，若A的秩与$\overline{A}$的秩均为2，即$r(A)=r(\overline{A})=2$，则$a+b=$

自测题第三章难点解答

19.原题：设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 0\\ a & 1 & 1\end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1 & b\end{pmatrix}$$，若A的秩与$\overline{A}$的秩均为2，即$r(A)=r(\overline{A})=2$，则$a+b=$

解 -3.

自测题第三章难点解答

19.原题：设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a-1 & 0\\ a & 1 & 1\end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1 & b\end{pmatrix}$$，若A的秩与$\overline{A}$的秩均为2，即$r(A)=r(\overline{A})=2$，则$a+b=$

解 -3.

理由：

自测题第三章难点解答

19.原题：设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&0\\a&1&1\end{pmatrix},\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\a&1&1&b\end{pmatrix},$$ 若A的秩与$\overline{A}$的秩均为2，即$r(A)=r(\overline{A})=2$，则$a+b=$

解 -3.

理由： $$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\0&1-a&1-a^2&b-a\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&0&1\\0&0&1-a^2&b-a+1\end{pmatrix}$$

$r(A)=2\Rightarrow a-1,1-a^2$不同时为0，

$r(\overline{A})=2\Rightarrow 1-a^2=0$且$b-a+1=0$，$a=-1,b=-2.$

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1, γ_2是非齐次线性方程组$AX = b$的两个线性无关的解，η_1, η_2是其导出齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关.

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关.

理由：

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1-\gamma_2$是$AX=0$的解，且η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，所以$\gamma_1-\gamma_2$可以由η_1,η_2线性表出，

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1, γ_2是非齐次线性方程组$AX = b$的两个线性无关的解，η_1, η_2是其导出齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1 - \gamma_2$是$AX = 0$的解，且η_1, η_2是$AX = 0$的基础解系，所以$\gamma_1 - \gamma_2$可以由η_1, η_2线性表出，从而$\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性相关.

γ_1, η_1, η_2线性无关.

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1, γ_2是非齐次线性方程组$AX = b$的两个线性无关的解，η_1, η_2是其导出齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1 - \gamma_2$是$AX = 0$的解，且η_1, η_2是$AX = 0$的基础解系，所以$\gamma_1 - \gamma_2$可以由η_1, η_2线性表出，从而$\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性相关.

γ_1, η_1, η_2线性无关.事实上，若γ_1, η_1, η_2线性相关，由η_1, η_2是$AX = 0$的基础解系，线性无关，

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1-\gamma_2$是$AX=0$的解，且η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，所以$\gamma_1-\gamma_2$可以由η_1,η_2线性表出，从而$\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性相关.

γ_1,η_1,η_2线性无关.事实上，若γ_1,η_1,η_2线性相关，由η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，线性无关，则γ_1可以由η_1,η_2线性表出，

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1, γ_2是非齐次线性方程组$AX = b$的两个线性无关的解，η_1, η_2是其导出齐次线性方程组$AX = 0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1 - \gamma_2$是$AX = 0$的解，且η_1, η_2是$AX = 0$的基础解系，所以$\gamma_1 - \gamma_2$可以由η_1, η_2线性表出，从而$\gamma_1 - \gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性相关.

γ_1, η_1, η_2线性无关.事实上，若γ_1, η_1, η_2线性相关，由η_1, η_2是$AX = 0$的基础解系，线性无关，则γ_1可以由η_1, η_2线性表出，再，齐次线性方程组解的组合仍然是它的解，所以γ_1是$AX = 0$的解，

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1-\gamma_2$是$AX=0$的解，且η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，所以$\gamma_1-\gamma_2$可以由η_1,η_2线性表出，从而$\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性相关.

γ_1,η_1,η_2线性无关.事实上，若γ_1,η_1,η_2线性相关，由η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，线性无关，则γ_1可以由η_1,η_2线性表出，再，齐次线性方程组解的组合仍然是它的解，所以γ_1是$AX=0$的解，这与已知矛盾；

自测题第三章难点解答

20.原题：设γ_1,γ_2是非齐次线性方程组$AX=b$的两个线性无关的解，η_1,η_2是其导出齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，则下列结论错误的是

解 $\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关.

理由：因为$\gamma_1-\gamma_2$是$AX=0$的解，且η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，所以$\gamma_1-\gamma_2$可以由η_1,η_2线性表出，从而$\gamma_1-\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性相关.

γ_1,η_1,η_2线性无关.事实上，若γ_1,η_1,η_2线性相关，由η_1,η_2是$AX=0$的基础解系，线性无关，则γ_1可以由η_1,η_2线性表出，再，齐次线性方程组解的组合仍然是它的解，所以γ_1是$AX=0$的解，这与已知矛盾；

由于γ_1,γ_2是$AX=b$的解，所以$\gamma_1+\gamma_2$是$AX=2b$的解，由上面的推理知，$\gamma_1+\gamma_2,\eta_1,\eta_2$ 线性无关；

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2 + \eta_1, \gamma_2 + \eta_2$线性无关.

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关.

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关. 若组合 $k_1\gamma_2+k_2(\gamma_2+\eta_1)+k_3(\gamma_2+\eta_2)=0$，即，$(k_1+k_2+k_3)\gamma_2+k_2\eta_1+k_3\eta_2=0$，

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关. 若组合 $k_1\gamma_2+k_2(\gamma_2+\eta_1)+k_3(\gamma_2+\eta_2)=0$，即，$(k_1+k_2+k_3)\gamma_2+k_2\eta_1+k_3\eta_2=0$，再由$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关

得 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关. 若组合 $k_1\gamma_2 + k_2(\gamma_2+\eta_1) + k_3(\gamma_2+\eta_2) = 0$，即，$(k_1+k_2+k_3)\gamma_2 + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 = 0$，再由$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关得

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

所以$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关.

自测题第三章难点解答

$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关. 若组合 $k_1\gamma_2 + k_2(\gamma_2+\eta_1) + k_3(\gamma_2+\eta_2) = 0$，即，$(k_1+k_2+k_3)\gamma_2 + k_2\eta_1 + k_3\eta_2 = 0$，再由$\gamma_2, \eta_1, \eta_2$线性无关

得 $$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0,$$

所以$\gamma_2, \gamma_2+\eta_1, \gamma_2+\eta_2$线性无关.

21.原题： 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$是矩阵$A$的列向量，若$\alpha_1, \alpha_2$线性无关，且 $\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2$，$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$，则下列关于线性方程组解的表述错误的是

自测题第三章难点解答

$\gamma_2,\gamma_2+\eta_1,\gamma_2+\eta_2$线性无关. 事实上，由前面的推理知，$\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关. 若组合 $k_1\gamma_2+k_2(\gamma_2+\eta_1)+k_3(\gamma_2+\eta_2)=0$，即，$(k_1+k_2+k_3)\gamma_2+k_2\eta_1+k_3\eta_2=0$，再由$\gamma_2,\eta_1,\eta_2$线性无关

得 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2=0 \\ k_3=0 \end{cases} \Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$，

所以$\gamma_2,\gamma_2+\eta_1,\gamma_2+\eta_2$线性无关.

21.原题： 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是矩阵$A$的列向量，若$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，且 $\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2$，$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，则下列关于线性方程组解的表述错误的是

解 $AX=0$的通解是$\begin{cases} x_1=2x_3+x_4 \\ x_2=3x_3-2x_4 \end{cases}$.

自测题第三章难点解答

理由：

自测题第三章难点解答

理由： 因为$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$，

且$AX = \beta$与$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$是同一个方程，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，且$AX=\beta$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$是同一个方程，所以$AX=\beta$有解向量$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

$AX=0$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$是同一个方程，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，且$AX=\beta$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$是同一个方程，所以$AX=\beta$有解向量$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

$AX=0$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$是同一个方程，而$\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2$，所以，

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3(2\alpha_1+3\alpha_2)+x_4(\alpha_1-2\alpha_2)=0$，

$(x_1+2x_3+x_4)\alpha_1+(x_2+3x_3-2x_4)\alpha_2=0$，

自测题第三章难点解答

理由：因为$\beta=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$，且$AX=\beta$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$是同一个方程，所以$AX=\beta$有解向量$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$；

$AX=0$与$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=0$是同一个方程，而$\alpha_3=2\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2$，所以，

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3(2\alpha_1+3\alpha_2)+x_4(\alpha_1-2\alpha_2)=0$，

$(x_1+2x_3+x_4)\alpha_1+(x_2+3x_3-2x_4)\alpha_2=0$，而$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，$AX=0$同解于$\begin{cases}x_1+2x_3+x_4=0\\x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}$，

自测题第三章难点解答

有基础解系 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 以及通解 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$;

自测题第三章难点解答

有基础解系 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 以及通解 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$;

利用

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2,\ \beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4,$$

方程 $AX = \beta$ 可以化为

$$(x_1 + 2x_3 + x_4 - 2)\alpha_1 + (x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4)\alpha_2 = 0,$$

自测题第三章难点解答

有基础解系 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 以及通解 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$;

利用

$\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2$，$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$，

方程 $AX = \beta$ 可以化为

$(x_1 + 2x_3 + x_4 - 2)\alpha_1 + (x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4)\alpha_2 = 0$，

而 α_1, α_2 线性无关，所以 $AX = \beta$ 同解于

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4 = 0 \end{cases}$，

自测题第三章难点解答

有基础解系 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 以及通解 $\begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$;

利用

$\alpha_3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_4 = \alpha_1 - 2\alpha_2$，$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$，

方程$AX = \beta$可以化为

$(x_1 + 2x_3 + x_4 - 2)\alpha_1 + (x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4)\alpha_2 = 0$，

而α_1, α_2线性无关，所以$AX = \beta$同解于

$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 - 2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4 = 0 \end{cases}$，有通解 $\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 4 - 3x_3 + 2x_4 \end{cases}$

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

理由：

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

理由：(1)由η_1,η_2,η_3线性无关，得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$线性无关，

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

理由：(1)由η_1,η_2,η_3线性无关，得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$线性无关，

且由η_1,η_2,η_3是$AX=b$的解，

得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$是$AX=0$的解，

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

理由：(1)由η_1,η_2,η_3线性无关，得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$线性无关，

且由η_1,η_2,η_3是$AX=b$的解，

得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$是$AX=0$的解，

而$AX=0$有4个未知量且$r(A)=2$，基础解系含2个解，

自测题第三章难点解答

22.原题：设A是3×4矩阵且A的秩$r(A)=2$，且$AX=b$有线性无关的解向量η_1,η_2,η_3，

(1)则下列所给的向量组中，$AX=0$的基础解系是；

(2)$AX=b$的解向量集是；

解 (1)$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$；

(2) $\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+(1-k_1-k_2)\eta_3|k_1,k_2$ 是任意数$\}$

理由：(1)由η_1,η_2,η_3线性无关，得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$线性无关，

且由η_1,η_2,η_3是$AX=b$的解，

得$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$是$AX=0$的解，

而$AX=0$有4个未知量且$r(A)=2$，基础解系含2个解，

所以$\eta_1-\eta_2$，$\eta_1-\eta_3$是$AX=0$的基础解系.

自测题第三章难点解答

$\eta_1+\eta_2$，$\eta_1+\eta_3$都是$AX=2b$的解；

自测题第三章难点解答

$\eta_1+\eta_2$，$\eta_1+\eta_3$都是$AX=2b$的解；

$\eta_1-\eta_2+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2-\eta_3$都是$AX=b$的解；

自测题第三章难点解答

$\eta_1+\eta_2$，$\eta_1+\eta_3$都是$AX=2b$的解；

$\eta_1-\eta_2+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2-\eta_3$都是$AX=b$的解；

η_1,η_2都是$AX=b$的解；

自测题第三章难点解答

$\eta_1+\eta_2$，$\eta_1+\eta_3$都是$AX=2b$的解；

$\eta_1-\eta_2+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2-\eta_3$都是$AX=b$的解；

η_1,η_2都是$AX=b$的解；

(2)$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$仍是$AX=b$的解的充要条件是$k_1+k_2+k_3=1$，

而$\eta_1-\eta_3$，$\eta_2-\eta_3$是$AX=0$的基础解系.

自测题第三章难点解答

$\eta_1+\eta_2$，$\eta_1+\eta_3$都是$AX=2b$的解；

$\eta_1-\eta_2+\eta_3$，$\eta_1+\eta_2-\eta_3$都是$AX=b$的解；

η_1,η_2都是$AX=b$的解；

(2)$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$仍是$AX=b$的解的充要条件是$k_1+k_2+k_3=1$，

而$\eta_1-\eta_3$，$\eta_2-\eta_3$是$AX=0$的基础解系.

23.原题：设$A=\begin{pmatrix}1&1&a\\0&a-1&0\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\b\end{pmatrix}$

(1)若线性方程组$AX=\beta$有两个不同的解，则$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=$；

(2)若$AX=0$的基础解系含有一个解向量，则$a=$；

(3)若$AX=0$的基础解系含有二个解向量，则$a=$.

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a = -1$；(3)$a = 1$

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a = -1$；(3)$a = 1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; (2)$a=-1$; (3)$a=1$

理由： (1)

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而

$a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而

$a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，所以$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而 $a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，所以$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(2)$AX=0$的基础解系含一个解，必有$r(A)=2$，

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而 $a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，所以$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(2)$AX=0$的基础解系含一个解，必有$r(A)=2$，即，$a-1, 1-a^2$不能同时为0，$a=-1$；

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而 $a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，所以$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(2)$AX=0$的基础解系含一个解，必有$r(A)=2$，即，$a-1, 1-a^2$不能同时为0，$a=-1$；

(2)$AX=0$的基础解系含两个解，必有$r(A)=1$，

自测题第三章难点解答

解 (1) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；(2)$a=-1$；(3)$a=1$

理由：(1)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b-a+1 \end{pmatrix}$$

$AX=\beta$有两个不同的解，必有$r(A)=r(\overline{A})<3$，从而 $a-1\neq 0, 1-a^2=0, b-a+1=0$，所以$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$；

(2)$AX=0$的基础解系含一个解，必有$r(A)=2$，即，$a-1, 1-a^2$不能同时为0，$a=-1$；

(2)$AX=0$的基础解系含两个解，必有$r(A)=1$，即，$a-1=1-a^2=0$，$a=1$.

Thank you!

AUTHOR: Ning Qun
ADDRESS: School of Mathematics and Statistics
SuZhou University
Suzhou, Anhui, 234000, China
EMAIL: Ning.qun@163.com